Top of Form



Search

Bottom of Form

[**Overview**](https://vnoi.info/wiki/gollum/overview)

**Một số bài toán quy hoạch động điển hình**

1. [algo](https://vnoi.info/wiki/gollum/overview/algo/)

1. [dp](https://vnoi.info/wiki/gollum/overview/algo/dp/)

Bài viết sưu tầm trên mạng.

Table of Contents

* [1. Dãy con đơn điệu dài nhất](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#1-d%C3%A3y-con-%C4%91%C6%A1n-%C4%91i%E1%BB%87u-d%C3%A0i-nh%E1%BA%A5t)
  + [1.1. Mô hình](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#1-1-m%C3%B4-h%C3%ACnh)
  + [1.2. Công thức QHĐ](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#1-2-c%C3%B4ng-th%E1%BB%A9c-qh%C4%91)
  + [1.3. Cài đặt](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#1-3-c%C3%A0i-%C4%91%E1%BA%B7t)
  + [1.4. Một số bài toán khác](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#1-4-m%E1%BB%99t-s%E1%BB%91-b%C3%A0i-to%C3%A1n-kh%C3%A1c)
    - [Bố trí phòng họp (mất tính thứ tự so với dãy ban đầu)](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#b%E1%BB%91-tr%C3%AD-ph%C3%B2ng-h%E1%BB%8Dp-m%E1%BA%A5t-t%C3%ADnh-th%E1%BB%A9-t%E1%BB%B1-so-v%E1%BB%9Bi-d%C3%A3y-ban-%C4%91%E1%BA%A7u)
    - [Cho thuê máy](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#cho-thu%C3%AA-m%C3%A1y)
    - [Dãy tam giác bao nhau](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#d%C3%A3y-tam-gi%C3%A1c-bao-nhau)
    - [Dãy đổi dấu](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#d%C3%A3y-%C4%91%E1%BB%95i-d%E1%BA%A5u)
    - [Dãy số WAVIO](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#d%C3%A3y-s%E1%BB%91-wavio)
    - [Xếp các khối đá](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#x%E1%BA%BFp-c%C3%A1c-kh%E1%BB%91i-%C4%91%C3%A1)
* [2. Vali (B)](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#2-vali-b)
  + [2.1. Mô hình](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#2-1-m%C3%B4-h%C3%ACnh)
  + [2.2. Công thức](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#2-2-c%C3%B4ng-th%E1%BB%A9c)
  + [2.3. Cài đặt](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#2-3-c%C3%A0i-%C4%91%E1%BA%B7t)
  + [2.4. Một số bài toán khác](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#2-4-m%E1%BB%99t-s%E1%BB%91-b%C3%A0i-to%C3%A1n-kh%C3%A1c)
    - [Dãy con có tổng bằng S](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#d%C3%A3y-con-c%C3%B3-t%E1%BB%95ng-b%E1%BA%B1ng-s)
    - [Chia kẹo](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#chia-k%E1%BA%B9o)
    - [Market (Olympic Balkan 2000)](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#market-olympic-balkan-2000)
    - [Điền dấu](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#%C4%91i%E1%BB%81n-d%E1%BA%A5u)
    - [Expression](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#expression)
    - [Farmer (IOI 2004)](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#farmer-ioi-2004)
* [3. Biến đổi xâu](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#3-bi%E1%BA%BFn-%C4%91%E1%BB%95i-x%C3%A2u)
  + [3.1. Mô hình](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#3-1-m%C3%B4-h%C3%ACnh)
  + [3.2. Hướng dẫn](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#3-2-h%C6%B0%E1%BB%9Bng-d%E1%BA%ABn)
  + [3.3. Một số bài toán khác](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#3-3-m%E1%BB%99t-s%E1%BB%91-b%C3%A0i-to%C3%A1n-kh%C3%A1c)
    - [Xâu con chung dài nhất](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#x%C3%A2u-con-chung-d%C3%A0i-nh%E1%BA%A5t)
    - [Bắc cầu](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#b%E1%BA%AFc-c%E1%BA%A7u)
    - [Palindrome (IOI 2000)](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#palindrome-ioi-2000)
* [4. Vali (A)](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#4-vali-a)
  + [4.1. Mô hình](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#4-1-m%C3%B4-h%C3%ACnh)
  + [4.2. Công thức](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#4-2-c%C3%B4ng-th%E1%BB%A9c)
  + [4.3. Cài đặt](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#4-3-c%C3%A0i-%C4%91%E1%BA%B7t)
  + [4.4. Một số bài toán khác](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#4-4-m%E1%BB%99t-s%E1%BB%91-b%C3%A0i-to%C3%A1n-kh%C3%A1c)
    - [Đổi tiền](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#%C4%91%E1%BB%95i-ti%E1%BB%81n)
* [5. Nhân ma trận](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#5-nh%C3%A2n-ma-tr%E1%BA%ADn)
  + [5.1. Mô hình](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#5-1-m%C3%B4-h%C3%ACnh)
  + [5.2. Công thức](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#5-2-c%C3%B4ng-th%E1%BB%A9c)
  + [5.3. Cài đặt](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#5-3-c%C3%A0i-%C4%91%E1%BA%B7t)
  + [5.4. Một số bài toán khác](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#5-4-m%E1%BB%99t-s%E1%BB%91-b%C3%A0i-to%C3%A1n-kh%C3%A1c)
    - [Chia đa giác](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#chia-%C4%91a-gi%C3%A1c)
    - [Biểu thức số học (IOI 1999)](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#bi%E1%BB%83u-th%E1%BB%A9c-s%E1%BB%91-h%E1%BB%8Dc-ioi-1999)
* [6. Ghép cặp](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#6-gh%C3%A9p-c%E1%BA%B7p)
  + [6.1. Mô hình](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#6-1-m%C3%B4-h%C3%ACnh)
  + [6.2. Công thức](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#6-2-c%C3%B4ng-th%E1%BB%A9c)
  + [6.3. Cài đặt](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#6-3-c%C3%A0i-%C4%91%E1%BA%B7t)
  + [6.4. Một số bài toán khác](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#6-4-m%E1%BB%99t-s%E1%BB%91-b%C3%A0i-to%C3%A1n-kh%C3%A1c)
    - [Câu lạc bộ](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#c%C3%A2u-l%E1%BA%A1c-b%E1%BB%99)
    - [Mua giày (Đề QG bảng B năm 2003)](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#mua-gi%C3%A0y-%C4%91%E1%BB%81-qg-b%E1%BA%A3ng-b-n%C4%83m-2003)
* [7. Di chuyển](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#7-di-chuy%E1%BB%83n)
  + [7.1. Mô hình](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#7-1-m%C3%B4-h%C3%ACnh)
  + [7.2. Công thức](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#7-2-c%C3%B4ng-th%E1%BB%A9c)
  + [7.3. Cài đặt](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#7-3-c%C3%A0i-%C4%91%E1%BA%B7t)
  + [7.4. Một số bài toán khác](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#7-4-m%E1%BB%99t-s%E1%BB%91-b%C3%A0i-to%C3%A1n-kh%C3%A1c)
    - [Tam giác (IOI 1994)](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#tam-gi%C3%A1c-ioi-1994)

**1. Dãy con đơn điệu dài nhất**

**1.1. Mô hình**

Cho dãy A1,A2,…,AnA1,A2,…,An. Hãy tìm một dãy con tăng có nhiều phần tử nhất của dãy.

**Đặc trưng**:

* Các phần tử trong dãy kết quả chỉ xuất hiện 1 lần. Vì vậy phương pháp làm là ta sẽ dùng vòng For duyệt qua các phần tử AA trong dãy, khác với các bài toán của mô hình 4 (đặc trưng là bài toán đổi tiền), các phần tử trong dãy có thể được chọn nhiều lần nên ta thực hiện bằng phương pháp cho giá trị cần quy đổi tăng dần từng đơn vị.
* Thứ tự của các phần tử được chọn phải được giữ nguyên so với dãy ban đầu.

Đặc trưng này có thể mất đi trong một số bài toán khác tùy vào yêu cầu cụ thể. Chẳng hạn bài: [Tam giác bao nhau](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/basic-problems.md#1-d%C3%A3y-con-%C4%91%C6%A1n-%C4%91i%E1%BB%87u-d%C3%A0i-nh%E1%BA%A5t_1-4-m%E1%BB%99t-s%E1%BB%91-b%C3%A0i-to%C3%A1n-kh%C3%A1c_d%C3%A3y-tam-gi%C3%A1c-bao-nhau).

**1.2. Công thức QHĐ**

Hàm mục tiêu: ff: độ dài dãy con.

Vì độ dài dãy con chỉ phụ thuộc vào một yếu tố là dãy ban đầu nên bảng phương án là bảng một chiều. Gọi LiLi là độ dài dãy con tăng dài nhất, các phần tử lấy trong miền từ A1A1 đến AiAi và phần tử cuối cùng là AiAi.

Nhận xét với cách làm này ta đã chia 1 bài toán lớn (dãy con của nn số) thành các bài toán con cùng kiểu có kích thước nhỏ hơn (dãy con của dãy ii số). Vấn đề là công thức truy hồi để phối hợp kết quả của các bài toán con.

Ta có công thức QHĐ để tính LiLi như sau:

* L1=1L1=1. (Hiển nhiên)
* Li=max(1,Lj+1)Li=max(1,Lj+1) với mọi phần tử jj thỏa mãn: 0<j<i0<j<i và Aj≤AiAj≤Ai

Tính LiLi: phần tử đang được xét là AiAi. Ta tìm đến phần tử Aj<AiAj<Ai có LjLj lớn nhất. Khi đó nếu bổ sung AiAi vào sau dãy con …Aj…Aj ta sẽ được dãy con tăng dần dài nhất xét từ A1…AiA1…Ai.

**1.3. Cài đặt**

Bảng phương án là một mảng một chiều LL để lưu trữ các giá trị của hàm QHĐ LiLi. Đoạn chương trình tính các giá trị của mảng LL như sau:

**for** i:= 1 **to** n **do**

**begin**

L[i]:=1;

**for** j:=1 **to** i-1 **do**

**if** (A[j]<=A[i]) **and** (L[i]<L[j]+1) **then** L[i]:=L[j]+1;

**end**;

Như vậy độ phức tạp bộ nhớ của bài toán là O(n)O(n), độ phức tạp thời gian là O(n2)O(n2).

Có một số phương pháp cài đặt tốt hơn so với phương pháp trên, cho chi phí thời gian là O(nlogn)O(nlogn), một trong những cách đó là dùng [Segment Tree](https://vnoi.info/wiki/algo/data-structures/segment-tree-extend).

**1.4. Một số bài toán khác**

Bài toán dãy con đơn điệu tăng dài nhất có biến thể đơn giản nhất là bài toán dãy con đơn điệu giảm dài nhất, tuy nhiên chúng ta có thể coi chúng như là một. Sau đây là một số bài toán khác.

**Bố trí phòng họp (mất tính thứ tự so với dãy ban đầu)**

**Bài toán**:

Có nn cuộc họp, cuộc họp thứ ii bắt đầu vào thời điểm AiAi và kết thúc ở thời điểm BiBi. Do chỉ có một phòng hội thảo nên 2 cuộc họp bất kì sẽ được cùng bố trí phục vụ nếu khoảng thời gian làm việc của chúng chỉ giao nhau tại đầu mút. Hãy bố trí phòng họp để phục vụ được nhiều cuộc họp nhất.

**Hướng dẫn**:

Sắp xếp các cuộc họp tăng dần theo thời điểm kết thúc BiBi. Thế thì cuộc họp ii sẽ bố trí được sau cuộc họp jj khi và chỉ khi j<ij<i và Bj≤AiBj≤Ai. Yêu cầu bố trí được nhiều cuộc họp nhất có thể đưa về việc tìm dãy các cuộc họp dài nhất thoả mãn điều kiện trên.

**Cho thuê máy**

**Bài toán**:

Trung tâm tính toán hiệu năng cao nhận được đơn đặt hàng của nn khách hàng. Khách hàng ii muốn sử dụng máy trong khoảng thời gian từ aiai đến bibi và trả tiền thuê là cici. Hãy bố trí lịch thuê máy để tổng số tiền thu được là lớn nhất mà thời gian sử dụng máy của 2 khách hàng bất kì được phục vụ đều không giao nhau (cả trung tâm chỉ có một máy cho thuê).

**Hướng dẫn**:

Tương tự như bài toán bố trí phòng họp, nếu sắp xếp các đơn đặt hàng theo thời điểm kết thúc, ta sẽ đưa được về bài toán **tìm dãy con có tổng lớn nhất**. Bài toán này là biến thể của bài toán tìm dãy con tăng dài nhất, ta có thể cài đặt bằng đoạn chương trình như sau:

**for** i:=1 **to** n **do**

**begin**

L[i]:=C[i];

**for** j:=1 **to** i-1 **do**

**if** (B[j]<=A[i]) **and** (L[i]<L[j]+C[i]) **then** L[i]:=L[j]+C[i];

**end**;

**Dãy tam giác bao nhau**

**Bài toán**:

Cho nn tam giác trên mặt phẳng. Tam giác ii bao tam giác jj nếu 3 đỉnh của tam giác jj đều nằm trong tam giác ii (có thể nằm trên cạnh). Hãy tìm dãy tam giác bao nhau có nhiều tam giác nhất.

**Hướng dẫn**:

Sắp xếp các tam giác tăng dần về diện tích. Khi đó tam giác ii sẽ bao tam giác jj nếu j<ij<i và 3 đỉnh của jj nằm trong ii. Từ đó có thể đưa về bài toán tìm dãy “tăng” dài nhất.

Bài toán có một số biến thể khác như tìm dãy hình tam giác, hình chữ nhật… bao nhau có tổng diện tích lớn nhất.

Việc kiểm tra điểm MM có nằm trong tam giác ABCABC không có thể dựa trên phương pháp tính diện tích: điểm MM nằm trong nếu S(ABC)=S(ABM)+S(ACM)+S(BCM)S(ABC)=S(ABM)+S(ACM)+S(BCM).

**Dãy đổi dấu**

**Bài toán**:

Cho dãy A1,A2,…,ANA1,A2,…,AN. Hãy tìm dãy con đổi dấu dài nhất của dãy đó. Dãy con đổi dấu Ai1,Ai2,…,AikAi1,Ai2,…,Aik phải thoả mãn các điều kiện sau:

* Ai1<Ai2>Ai3<…Ai1<Ai2>Ai3<… hoặc Ai1>Ai2<Ai3>…Ai1>Ai2<Ai3>…
* Các chỉ số phải cách nhau ít nhất LL: i2−i1≥Li2−i1≥L, i3−i2≥Li3−i2≥L, …
* Chênh lệch giữa 2 phần tử liên tiếp nhỏ hơn UU: |Ai1−Ai2|≤U|Ai1−Ai2|≤U, |Ai2−Ai3|≤U|Ai2−Ai3|≤U, …

**Hướng dẫn**:

Gọi LiLi là số phần tử của dãy con đổi dấu có phần tử cuối cùng là AiAi và phần tử cuối cùng lớn hơn phần tử đứng trước. Tương tự, PiPi là số phần tử của dãy con đổi dấu có phần tử cuối cùng là AiAi và phần tử cuối cùng nhỏ hơn phần tử đứng trước.

Ta dễ dàng suy ra:

* Li=max(1,Pj+1)Li=max(1,Pj+1), với mọi jj thỏa mãn: j≤i−Lj≤i−L và Ai−U≤Aj<AiAi−U≤Aj<Ai.
* Pi=max(1,Lj+1)Pi=max(1,Lj+1), với mọi jj thỏa mãn: j≤i−Lj≤i−L và Ai<Aj≤Ai+UAi<Aj≤Ai+U.

**Dãy số WAVIO**

**Bài toán**:

Dãy số Wavio là dãy số nguyên thỏa mãn các tính chất: các phần tử đầu sắp xếp thành 1 dãy tăng dần đến 1 phần tử đỉnh sau đó giảm dần. Ví dụ dãy số 1 2 3 4 5 2 1 là 1 dãy Wavio độ dài 7. Cho 1 dãy gồm NN số nguyên, hãy chỉ ra một dãy con Wavio có đọ dài lớn nhất trích ra từ dãy đó.

**Hướng dẫn**:

L1iL1i là mảng ghi độ dài lớn nhất của 1 dãy con tăng dần trích ra từ dãy NN phần tử kể từ phần tử 1 đến phần tử aiai.

L2iL2i: mảng ghi độ dài lớn nhất của dãy con giảm dần trích ra từ dãy NN phần tử kể từ phần tử ANAN đến AiAi. Ta tìm phần tử jj trong 2 mảng L1L1, L2L2 thỏa mãn L1j+L2jL1j+L2j lớn nhất.

**Xếp các khối đá**

**Bài toán**:

Cho NN khối đá (N≤5000)(N≤5000).

Các khối đá đều có dạng hình hộp chữ nhật và được đặc trưng bới 3 kích thước: dài, rộng, cao. Một cách xây dựng tháp là một cách đặt một số các khối đá trong các khối đá đã cho chồng lên nhau theo quy tắc:

* Chiều cao mỗi khối đá là kích thước nhỏ nhất trong 3 kích thước.
* Các mép của khối đá được đặt song song với nhau sao cho không có phần nào của khối trên nằm chìa ra ngoài khối dưới.

Hãy chỉ ra cách để xây dựng được một cái tháp sao cho số khối đá được dùng là nhiều nhất.

**2. Vali (B)**

**2.1. Mô hình**

Có nn đồ vật, vật thứ ii có trọng lượng AiAi và giá trị BiBi. Hãy chọn ra một số các đồ vật, mỗi vật một cái để xếp vào 1 vali có trọng lượng tối đa WW sao cho tổng giá trị của vali là lớn nhất.

**2.2. Công thức**

Hàm mục tiêu: ff: tổng giá trị của vali.

Nhận xét: giá trị của vali phụ thuộc vào 2 yếu tố: có bao nhiêu vật đang được xét và trọng lượng của các vật. Do đó bảng phương án sẽ là bảng 2 chiều: - L(i,j)L(i,j): tổng giá trị lớn nhất của vali khi xét từ vật 1 .. vật ii và trọng lượng của vali chưa vượt quá jj. Chú ý rằng khi xét đến L[i,j]L[i,j] thì các giá trị trên bảng phương án đều đã được tối ưu.

Tính L(i,j)L(i,j): vật đang xét là aiai với trọng lượng của vali không được quá jj. Có 2 khả năng xảy ra:

* Nếu chọn AiAi đưa vào vali, trọng lượng vali trước đó phải không quá j−Aij−Ai. Vì mỗi vật chỉ được chọn 1 lần nên giá trị lớn nhất của vali lúc đó là L(i−1,j−Ai)+BiL(i−1,j−Ai)+Bi.
* Nếu không chọn AiAi, trọng lượng của vali là như cũ (như lúc trước khi chọn AiAi): L(i−1,j)L(i−1,j).

Tóm lại ta có L[i,j]=max(L(i−1,j−Ai)+Bi,L(i−1,j))L[i,j]=max(L(i−1,j−Ai)+Bi,L(i−1,j)).

**2.3. Cài đặt**

**For** i:=1 **to** n **do**

**For** j:=1 **to** W **do**

**If** b[i]<=j **then** L[i,j]:=max(L[ i-1,j-A[i] ] + B[i], L[i-1,j])

**else** L[i,j]:=L[i-1,j];

**2.4. Một số bài toán khác**

**Dãy con có tổng bằng S**

**Bài toán**:

Cho dãy A1,A2,…,ANA1,A2,…,AN. Tìm một dãy con của dãy đó có tổng bằng SS.

**Hướng dẫn**:

Đặt L[i,t]=1L[i,t]=1 nếu có thể tạo ra tổng tt từ một dãy con của dãy gồm các phần tử A1,A2,…,AiA1,A2,…,Ai. Ngược lại thì L[i,t]=0L[i,t]=0. Nếu L[n,S]=1L[n,S]=1 thì đáp án của bài toán trên là “có”.

Ta có thể tính L[i,t]L[i,t] theo công thức: L[i,t]=1L[i,t]=1 nếu L[i−1,t]=1L[i−1,t]=1 hoặc L[i−1,t−a[i]]=1L[i−1,t−a[i]]=1.

**Cài đặt**:

Nếu áp dụng luôn công thức trên thì ta cần dùng bảng phương án hai chiều. Ta có thể nhận xét rằng để tính dòng thứ ii, ta chỉ cần dòng i−1i−1. Bảng phương án khi đó chỉ cần 1 mảng 1 chiều L[0..S]L[0..S] và được tính như sau:

L[t]:=0; L[0]:=1;

**for** i := 1 **to** n **do**

**for** t := S **downto** a[i] **do**

**if** (L[t]=0) **and** (L[t-a[i]]=1) **then** L[t]:=1;

Dễ thấy độ phức tạp bộ nhớ của cách cài đặt trên là O(m)O(m), độ phức tạp thời gian là O(n∗m)O(n∗m), với mm là tổng của nn số. Hãy tự kiểm tra xem tại sao vòng for thứ 2 lại là for downto chứ không phải là for to.

**Chia kẹo**

**Bài toán**:

Cho nn gói kẹo, gói thứ ii có aiai viên. Hãy chia các gói thành 2 phần sao cho chênh lệch giữa 2 phần là ít nhất.

**Hướng dẫn**:

Gọi TT là tổng số kẹo của nn gói. Chúng ta cần tìm số SS lớn nhất thoả mãn:

* S≤T/2S≤T/2.
* Có một dãy con của dãy aa có tổng bằng SS.

Khi đó sẽ có cách chia với chênh lệch 2 phần là T−2ST−2S là nhỏ nhất và dãy con có tổng bằng SS ở trên gồm các phần tử là các gói kẹo thuộc phần thứ nhất. Phần thứ hai là các gói kẹo còn lại.

**Market (Olympic Balkan 2000)**

**Bài toán**:

Người đánh cá Clement bắt được nn con cá, khối lượng mỗi con là aiai, đem bán ngoài chợ. Ở chợ cá, người ta không mua cá theo từng con mà mua theo một lượng nào đó. Chẳng hạn 3 kg, 5kg…

Ví dụ: có 3 con cá, khối lượng lần lượt là: 3, 2, 4. Mua lượng 6kg sẽ phải lấy con cá thứ 2 và và thứ 3. Mua lượng 3 kg thì lấy con thứ nhất. Không thể mua lượng 8 kg. Nếu bạn là người đầu tiên mua cá, có bao nhiêu lượng bạn có thể chọn?

**Hướng dẫn**

Thực chất bài toán là tìm các số SS mà có một dãy con của dãy aa có tổng bằng SS. Ta có thể dùng phương pháp đánh dấu của bài chia kẹo ở trên rồi đếm các giá trị tt mà L[t]=1L[t]=1.

**Điền dấu**

**Bài toán**:

Cho nn số tự nhiên A1,A2,…,ANA1,A2,…,AN. Ban đầu các số được đặt liên tiếp theo đúng thứ tự cách nhau bởi dấu "?": A1 ? A2 ? ... ? AN. Cho trước số nguyên SS, có cách nào thay các dấu ? bằng dấu + hay dấu − để được một biểu thức số học cho giá trị là SS không?

**Hướng dẫn**:

Đặt L[i,t]=1L[i,t]=1 nếu có thể điền dấu vào ii số đầu tiên và cho kết quả bằng tt. Ta có công thức sau để tính LL:

* L[1, a[1]] = 1
* L[i, t] = 1 nếu L[i - 1, t + a[i]] = 1 hoặc L[i - 1, t - a[i]] = 1.

Nếu L[n, S] = 1 thì câu trả lời của bài toán là có.

Khi cài đặt, có thể dùng một mảng 2 chiều (lưu toàn bộ bảng phương án) hoặc 2 mảng một chiều (để lưu dòng ii và dòng i−1i−1). Chú ý là chỉ số theo tt của các mảng phải có cả phần âm (tức là từ −T−T đến TT, với TT là tổng của nn số), vì trong bài này chúng ta dùng cả dấu - nên có thể tạo ra các tổng âm.

Bài này có một biến thể là đặt dấu sao cho kết quả là một số chia hết cho kk. Ta có thuật giải tương tự bài toán trên bằng cách thay các phép cộng, trừ bằng các phép cộng và trừ theo modulo kk và dùng mảng đánh dấu với các giá trị từ 0 đến k−1k−1 (là các số dư có thể có khi chia cho kk). Đáp số của bài toán là L[n,0]L[n,0].

**Expression**

**Bài toán**:

Cho nn số nguyên. Hãy chia chúng thành 2 nhóm sao cho tích của tổng 2 nhóm là lớn nhất.

**Hướng dẫn**:

Gọi TT là tổng nn số nguyên đó. Giả sử ta chia dãy thành 2 nhóm, gọi SS là tổng của một nhóm, tổng nhóm còn lại là T−ST−S và tích của tổng 2 nhóm là S∗(T−S)S∗(T−S). Bằng phương pháp đánh dấu ta xác định được mọi số SS là tổng của một nhóm (như bài Market) và tìm số SS sao cho S∗(T−S)S∗(T−S) đạt max.

**Farmer (IOI 2004)**

**Bài toán**

Một người có NN mảnh đất và MM dải đất. Các mảnh đất có thể coi là một tứ giác và các dải đất thì coi như một đường thẳng. Dọc theo các dải đất ông ta trồng các cây bách, dải đất thứ ii có AiAi cây bách. Ông ta cũng trồng các cây bách trên viền của các mảnh đất, mảnh đất thứ jj có BjBj cây bách. Cả ở trên các mảnh đất và dải đất, xen giữa 2 cây bách ông ta trồng một cây ôliu. Ông ta cho con trai được chọn các mảnh đất và dải đất tuỳ ý với điều kiện tổng số cây bách không vượt quá QQ. Người con trai phải chọn thế nào để có nhiều cây ôliu (loài cây mà anh ta thích) nhất.

**Hướng dẫn**

Dễ thấy mảnh đất thứ ii có AiAi cây ôliu và dải đất thứ jj có Bj−1Bj−1 cây ôliu. Coi các mảnh đất và dải đất là các “đồ vật”, đồ vật thứ kk có khối lượng WkWk và giá trị VkVk (nếu kk là mảnh đất ii thì Wk=Vk=AiWk=Vk=Ai, nếu kk là dải đất jj thì Wk=BjWk=Bj, Vk=Bj−1Vk=Bj−1). Ta cần chọn các “đồ vật”, sao cho tổng “khối lượng” của chúng không vượt QQ và tổng “giá trị” là lớn nhất. Đây chính là bài toán xếp balô đã trình bày ở trên.

**3. Biến đổi xâu**

**3.1. Mô hình**

Cho 2 xâu XX, FF. Xâu gốc có nn kí tự X1X2…XnX1X2…Xn, xâu đích có mm kí tự F1F2…FmF1F2…Fm. Có 3 phép biến đổi:

* Chèn 1 kí tự vào sau kí tự thứ ii: I i C
* Thay thế kí tự ở vị trí thứ ii bằng kí tự CC: R i C
* Xoá kí tự ở vị trí thứ ii: D i

Hãy tìm số ít nhất các phép biến đổi để biến xâu XX thành xâu FF.

**3.2. Hướng dẫn**

Hàm mục tiêu: ff: số phép biến đổi.

Dễ thấy số phép biến đổi phụ thuộc vào vị trí ii đang xét của xâu XX và vị trí jj đang xét của xâu FF. Do vậy để cài đặt cho bảng phương án ta sẽ dùng mảng 2 chiều.

Gọi L[i,j]L[i,j] là số phép biến đổi ít nhất để biến xâu XiXi gồm ii kí tự phần đầu của XX (Xi=X[1..i]Xi=X[1..i]) thành xâu FjFj gồm jj kí tự phần đầu của FF (Fj=F[1..j]Fj=F[1..j]).

Dễ thấy L[0,j]=jL[0,j]=j và L[i,0]=iL[i,0]=i.

Có 2 trường hợp xảy ra:

* Nếu X[i]=F[j]X[i]=F[j]:
  + X1X2…Xi−1X1X2…Xi−1 XiXi
  + F1F2…Fj−1F1F2…Fj−1 XiXi
  + thì ta chỉ phải biến đổi xâu Xi−1Xi−1 thành xâu Fj−1Fj−1. Do đó L[i,j]=L[i−1,j−1]L[i,j]=L[i−1,j−1].
* Ngược lại, ta có 3 cách biến đổi:
  + Xoá kí tự XiXi:
    - X1X2…Xi−1X1X2…Xi−1
    - F1F2…Fj−1F1F2…Fj−1 FjFj
    - Xâu Xi−1Xi−1 thành FjFj. Khi đó L[i,j]=L[i−1,j]+1L[i,j]=L[i−1,j]+1. (Cộng 1 là do ta đã dùng 1 phép xóa)
  + Thay thế XiXi bởi FjFj:
    - X1X2…Xi−1X1X2…Xi−1 FjFj
    - F1F2…Fj−1F1F2…Fj−1 FjFj
    - Xâu Xi−1Xi−1 thành Fj−1Fj−1. Khi đó L[i,j]=L[i−1,j−1]+1L[i,j]=L[i−1,j−1]+1.
  + Chèn FjFj vào sau XiXi:
    - X1X2…XiX1X2…Xi FjFj
    - F1F2…Fj−1F1F2…Fj−1 FjFj
    - Xâu XiXi thành Fj−1Fj−1. Khi đó L[i,j]=L[i,j−1]+1L[i,j]=L[i,j−1]+1

Tổng kết lại, ta có công thức QHĐ:

* L[0,j]=j
* L[i,0]=i
* L[i,j] =L[i−1,j−1] nếu Xi=YjXi=Yj.
* L[i,j] = min(L[i−1,j], L[i,j−1], L[i−1,j−1]) + 1 nếu Xi≠FjXi≠Fj.

Bài này ta có thể tiết kiệm biến hơn bằng cách dùng 2 mảng 1 chiều tính lẫn nhau và một mảng đánh dấu 2 chiều để truy vết.

**3.3. Một số bài toán khác**

**Xâu con chung dài nhất**

**Bài toán**:

Cho 2 xâu XX, YY. Hãy tìm xâu con của XX và của YY có độ dài lớn nhất. Biết xâu con của một xâu thu được khi xóa một số kí tự thuộc xâu đó (hoặc không xóa kí tự nào).

**Công thức QHĐ**:

Gọi L[i,j]L[i,j] là độ dài xâu con chung dài nhất của xâu XiXi gồm ii kí tự phần đầu của XX (Xi=X[1..i]Xi=X[1..i]) và xâu YjYj gồm jj kí tự phần đầu của YY (Yj=Y[1..j]Yj=Y[1..j]). Ta có công thức quy hoạch động như sau:

* L[0,j] = L[i,0] = 0
* L[i,j] = L[i−1,j−1] + 1 nếu Xi=YjXi=Yj
* L[i,j] = max(L[i−1,j], L[i,j−1]) nếu Xi≠YjXi≠Yj.

**Cài đặt**:

Bảng phương án là một mảng 2 chiều L[0..m,0..n] để lưu các giá trị của hàm QHĐ L[i,j]L[i,j].

Đoạn chương trình cài đặt công thức QHĐ trên như sau:

**for** i:=0 **to** m **do** L[i,0]:=0;

**for** j:=0 **to** n **do** L[0,j]:=0;

**for** i:=1 **to** m **do**

**for** j:=1 **to** n **do**

**if** X[i]=Y[j] **then** L[i,j]:=L[i-1,j-1]+1

**else** L[i,j]:=max(L[i-1,j],L[i,j-1]]);

Như vậy độ phức tạp bộ nhớ của bài toán là O(n2)O(n2), độ phức tạp thời gian là O(n2)O(n2).

Có một phương pháp cài đặt tốt hơn, chỉ với độ phức tạp bộ nhớ O(n)O(n) dựa trên nhận xét sau: để tính ô L[i,j]L[i,j] của bảng phương án, ta chỉ cần 3 ô L[i−1,j−1]L[i−1,j−1], L[i−1,j]L[i−1,j] và L[i,j−1]L[i,j−1]. Tức là để tính dòng L[i]L[i] thì chỉ cần dòng L[i−1]L[i−1]. Do đó ta chỉ cần 2 mảng 1 chiều để lưu dòng vừa tính (P) và dòng đang tính (L) mà thôi. Cách cài đặt mới như sau:

**for** j:=0 **to** n **do** P[j]:=0;

**for** i:=1 **to** m **do**

**begin**

L[0] := 0;

**for** j:=1 **to** n **do**

**if** X[i]=Y[j] **then** L[i,j]:=P[j-1]+1

**else** L[i,j]:=max(P[j], L[j-1]);

P := L;

**end**;

**Bắc cầu**

**Bài toán**:

Hai nước Alpha và Beta nằm ở hai bên bờ sông Omega, Alpha nằm ở bờ bắc và có MM thành phố được đánh số từ 1 đến MM, Beta nằm ở bờ nam và có NN thành phố được đánh số từ 1 đến NN (theo vị trí từ đông sang tây). Mỗi thành phố của nước này thường có quan hệ kết nghĩa với một số thành phố của nước kia. Để tăng cường tình hữu nghị, hai nước muốn xây các cây cầu bắc qua sông, mỗi cây cầu sẽ là nhịp cầu nối 2 thành phố kết nghĩa. Với yêu cầu là các cây cầu không được cắt nhau và mỗi thành phố chỉ là đầu cầu cho nhiều nhất là một cây cầu, hãy chỉ ra cách bắc cầu được nhiều cầu nhất.

**Hướng dẫn**:

Gọi các thành phố của Alpha lần lượt là A1,A2,…,AMA1,A2,…,AM; các thành phố của Beta là B1,B2,…,BNB1,B2,…,BN. Nếu thành phố AiAi và BjBj kết nghĩa với nhau thì coi AiAi "bằng” BjBj. Để các cây cầu không cắt nhau, nếu ta đã chọn cặp thành phố (Ai,Bj)(Ai,Bj) để xây cầu thì cặp tiếp theo phải là cặp (Au,Bv)(Au,Bv) sao cho u>iu>i và v>jv>j. Như vậy các cặp thành phố được chọn xây cầu có thể coi là một dãy con chung của hai dãy AA và BB.

Bài toán của chúng ta trở thành bài toán tìm dãy con chung dài nhất, ở đây hai phần tử “bằng” nhau nếu chúng có quan hệ kết nghĩa.

**Palindrome (IOI 2000)**

**Bài toán**:

Một xâu gọi là xâu đối xứng (palindrome) nếu xâu đó đọc từ trái sang phải hay từ phải sang trái đều như nhau. Cho một xâu SS, hãy tìm số kí tự ít nhất cần thêm vào SS để SS trở thành xâu đối xứng.

**Hướng dẫn**:

Bài toán này có một công thức QHĐ như sau:

* Gọi L[i,j]L[i,j] là số kí tự ít nhất cần thêm vào xâu con S[i..j]S[i..j] của SS để xâu đó trở thành đối xứng.
* Đáp số của bài toán sẽ là L[1,n]L[1,n] với nn là số kí tự của SS. Ta có công thức sau để tính L[i,j]L[i,j]:
  + L(i,i)=0L(i,i)=0.
  + L(i,j)=L(i+1,j−1)L(i,j)=L(i+1,j−1) nếu Si=SjSi=Sj
  + L(i,j)=max(L(i+1,j),L(i,j−1))L(i,j)=max(L(i+1,j),L(i,j−1)) nếu Si≠SjSi≠Sj

Bạn đọc dễ dàng có thể kiểm chứng công thức đó. Ta có thể cài đặt trực tiếp công thức đó bằng phương pháp đệ quy có nhớ. Tuy nhiên khi đó độ phức tạp bộ nhớ là O(n2)O(n2). Có một phương pháp cài đặt tiết kiệm hơn, có thể tham khảo ở [bài viết của Nguyễn Hoành Tiến](https://vnoi.info/wiki/algo/dp/palindrome-problems)

Ta có thuật toán đơn giản hơn như sau:

* Gọi PP là xâu đảo của SS và TT là xâu con chung dài nhất của SS và PP. Khi đó các kí tự của SS không thuộc TT cũng là các kí tự cần thêm vào để SS trở thành đối xứng. Đáp số của bài toán sẽ là n−kn−k, với kk là độ dài của TT.
* Ví dụ: S=edbabcd, xâu đảo của SS là P=dcbabde. Xâu con chung dài nhất của SS và PP là T=dbabd. Như vậy cần thêm 2 kí tự là e và c vào để SS trở thành xâu đối xứng.

**4. Vali (A)**

**4.1. Mô hình**

Cho nn vật, vật ii nặng AiAi và có giá trị BiBi. Hãy chọn ra một số vật để cho vào balô sao cho tổng khối lượng không vượt quá WW và tổng giá trị là lớn nhất. Chú ý rằng mỗi vật có thể được chọn nhiều lần.

**4.2. Công thức**

Gọi L(i,j)L(i,j) là tổng giá trị lớn nhất khi được chọn ii vật từ 1 đến ii cho vào balô với tổng khối lượng không vượt quá jj. L(n,W)L(n,W) sẽ là đáp số của bài toán (là giá trị lớn nhất có được nếu chọn nn vật và tổng khối lượng không vượt quá WW).

Công thức tính L(i,t)L(i,t) như sau:

* L(i,0)=0L(i,0)=0
* L(0,t)=0L(0,t)=0
* L(i,t)=L(i−1,t)L(i,t)=L(i−1,t) nếu t<Ait<Ai
* L(i,t)=max(L(i−1,t),L(i,t−Ai)+Bi)L(i,t)=max(L(i−1,t),L(i,t−Ai)+Bi) nếu t≥Ait≥Ai

Trong đó: L(i−1,t)L(i−1,t) là giá trị có được nếu không đưa vật ii vào balô, L(i,t−Ai)+BiL(i,t−Ai)+Bi là giá trị có được nếu chọn vật ii.

**4.3. Cài đặt**

Ta có thể dùng một mảng 2 chiều để lưu bảng phương án, tuy nhiên dựa trên nhận xét rằng để tính dòng ii của bảng phương án chỉ cần dòng i−1i−1, ta chỉ cần dùng 2 mảng một chiều PP và LL có chỉ số từ 0 đến mm để lưu 2 dòng đó. Đoạn chương trình con tính bảng phương án như sau.

L[t] := 0; *{với mọi t}*

**for** i := 1 **to** n **do**

**begin**

P:=L;

**for** t := 0 **to** m **do**

**if** t<a[i] **then** L[t]:=P[t]

**else** L[t] := max(P[t],L[t-a[i]]+b[i]);

**end**;

Nếu để ý kĩ bạn sẽ thấy rằng đoạn trình trên chỉ viết giống công thức QHĐ chứ chưa tối ưu. Chẳng hạn đã có lệnh gán P:=L, sau đó lại có gán L[t]:=P[t] với các giá trị t<a[i] là không cần thiết. Bạn đọc có thể tự cải tiến để chương trình tối ưu hơn. Độ phức tạp bộ nhớ là O(m)O(m) và độ phức tạp thời gian là O(m∗n)O(m∗n).

**4.4. Một số bài toán khác**

**Đổi tiền**

**Bài toán**

Ở đất nước Omega người ta chỉ tiêu tiền xu. Có NN loại tiền xu, loại thứ ii có mệnh giá là AiAi đồng. Một người khách du lịch đến Omega du lịch với số tiền MM đồng. Ông ta muốn đổi số tiền đó ra tiền xu Omega để tiện tiêu dùng. Ông ta cũng muốn số đồng tiền đổi được là ít nhất (cho túi tiền đỡ nặng khi đi đây đi đó). Bạn hãy giúp ông ta tìm cách đổi tiền.

**Hướng dẫn**

Bài toán này khá giống bài toán xếp balô (“khối lượng” là mệnh giá, “giá trị” là 1), chỉ có một thay đổi nhỏ: tổng giá trị yêu cầu là nhỏ nhất.

Do đó ta cũng xây dựng hàm QHĐ một cách tương tự: Gọi L[i,t]L[i,t] là số đồng xu ít nhất nếu đổi tt đồng ra ii loại tiền xu (từ 1 đến ii). Công thức tính L[i,t]L[i,t] như sau:

* L[i,0]=0L[i,0]=0
* L[0,t]=infL[0,t]=inf với t>0t>0.
* L[i,t]=L[i−1,t]L[i,t]=L[i−1,t] nếu t<A[i]t<A[i].
* L[i,t]=min(L[i−1,t],L[i,t−A[i]]+1)L[i,t]=min(L[i−1,t],L[i,t−A[i]]+1) nếu t≥Ait≥Ai.

Công thức này khác công thức của bài xếp balô ở chỗ: dùng hàm **min** chứ không phải hàm **max** (vì cần tìm cách chọn ít hơn).

**5. Nhân ma trận**

**5.1. Mô hình**

Nhân một ma trận kích thước m∗nm∗n với một ma trận n∗pn∗p, số phép nhân phải thực hiện là m∗n∗pm∗n∗p. Mặt khác phép nhân các ma trận có tính kết hợp, tức là: (A∗B)∗C=A∗(B∗C)(A∗B)∗C=A∗(B∗C)

Do đó khi tính tích nhiều ma trận, ta có thể thực hiện theo các trình tự khác nhau, mỗi trình tự tính sẽ quyết định số phép nhân cần thực hiện.

Cho NN ma trận A1,A2,…,ANA1,A2,…,AN, ma trận AA có kích thước là di−1∗didi−1∗di. Hãy xác định trình tự nhân ma trận A1∗A2∗…∗ANA1∗A2∗…∗AN sao cho số phép nhân cần thực hiện là ít nhất.

**5.2. Công thức**

Gọi F(i,j)F(i,j) là số phép nhân để tính tích các ma trận từ AiAi đến AjAj (Ai∗Ai+1∗…∗Aj)(Ai∗Ai+1∗…∗Aj).

* F[i,i]=0F[i,i]=0.
* F[i,i+1]=di−1∗di∗di+1F[i,i+1]=di−1∗di∗di+1
* F[i,j]=min(F[i,k]+F[k+1,j]+di−1∗dk∗djF[i,j]=min(F[i,k]+F[k+1,j]+di−1∗dk∗dj với k=i+1,i+2,…,j−1k=i+1,i+2,…,j−1

Công thức hơi phức tạp nên tôi xin giải thích như sau:

* F[i,i]=0F[i,i]=0 là hiển nhiên.
* F[i,i+1]F[i,i+1] là số phép nhân khi nhân AiAi và Ai+1Ai+1. AiAi có kích thước di−1∗didi−1∗di, Ai+1Ai+1 có kích thước di∗di+1di∗di+1, do đó F[i,i+1]=di−1∗di∗di+1F[i,i+1]=di−1∗di∗di+1
* Với j>i+1j>i+1 thì ta thấy có thể tính Ai∗Ai+1∗…∗AjAi∗Ai+1∗…∗Aj bằng cách chọn một vị trí kk nào đó để đặt ngoặc theo trình tự: Ai∗Ai+1∗…∗Aj=(Ai..Ak)∗(Ak+1..Aj)Ai∗Ai+1∗…∗Aj=(Ai..Ak)∗(Ak+1..Aj)

Ma trận kết quả của phép nhân (Ai..Ak)(Ai..Ak) có kích thước di−1∗dkdi−1∗dk, ma trận kết quả của phép nhân (Ak+1..Aj)(Ak+1..Aj) có kích thước dk∗djdk∗dj. Với cách đặt đó ta sẽ mất F[i,k]F[i,k] phép nhân để có kết quả trong dấu ngoặc thứ nhất, mất thêm F[k+1,j]F[k+1,j] phép nhân để có kết quả trong dấu ngoặc thứ hai, và cuối cùng mất di−1∗dk∗djdi−1∗dk∗dj để nhân 2 ma trận kết quả đó. Từ đó tổng số phép nhân của cách đặt đó là: F[i,k]+F[k+1,j]+di−1∗dk∗djF[i,k]+F[k+1,j]+di−1∗dk∗dj.

Ta chọn vị trí kk cho số phép nhân ít nhất.

**5.3. Cài đặt**

Bảng phương án là một mảng 2 chiều FF để lưu F[i,j]F[i,j]. Chú ý khi cài đặt là để tính được F[i,j]F[i,j], ta phải tính F[i,k]F[i,k] và F[k+1,j]F[k+1,j] trước. Phương pháp đơn giản để làm điều đó là phương pháp đệ quy có nhớ.

Tuy nhiên dựa vào nhận xét là trong công thức QHĐ: j−ij−i lớn hơn k−ik−i và j−kj−k, ta có thể tính theo trình tự khác: tính các phần tử F[i,j]F[i,j] với j−ij−i từ nhỏ đến lớn (không phải là tính các giá trị F[i,j]F[i,j] với ii, jj từ nhỏ đến lớn như vẫn làm). Với cách đó, khi tính đến F[i,j]F[i,j] thì ta đã có F[i,k]F[i,k] và F[k+1,j]F[k+1,j].

Đoạn chương trình tính bảng phương án như sau:

**for** i:=1 **to** n **do**

F[i,i]:=0;

**for** i:=1 **to** n-1 **do**

F[i,i+1] := d[i-1]\*d[i]\*d[i+1];

**for** m:=2 **to** n-1 **do**

**begin**

**for** i:=1 **to** n-m **do**

**begin**

j:=i+m;

F[i,j]:=oo;

**for** k:=i+1 **to** j-1 **do**

F[i,j]:=min(F[i,j], F[i,k]+F[k+1,j]+d[i-1]\*d[k]\*d[j]);

**end**;

**end**;

Với cách cài đặt trên, độ phức tạp bộ nhớ là O(n2)O(n2), độ phức tạp thời gian là O(n3)O(n3).

**5.4. Một số bài toán khác**

**Chia đa giác**

**Bài toán**

Cho một đa giác lồi NN đỉnh. Bằng các đường chéo không cắt nhau, ta có thể chia đa giác thành N−2N−2 tam giác. Hãy xác định cách chia có tổng các đường chéo ngắn nhất.

**Hướng dẫn**

Để đơn giản ta coi mọi đoạn thẳng nối 2 đỉnh đều là “đường chéo” (nếu nối 2 đỉnh trùng nhau hoặc 2 đỉnh liên tiếp thì có độ dài bằng 0).

Gọi F(i,j)F(i,j) là tổng độ dài các đường chéo khi chia đa giác gồm các đỉnh từ ii đến jj thành các tam giác. Nếu j<i+3j<i+3 thì đa giác đó có ít hơn 4 đỉnh, không cần phải chia nên F(i,j)=0F(i,j)=0. Ngược lại ta xét cách chia đa giác đó bằng cách chọn một đỉnh kk nằm giữa ii, jj và nối ii, jj với kk. Khi đó F[i,j]=F[i,k]+F[k,j]+d[i,k]+d[k,j]F[i,j]=F[i,k]+F[k,j]+d[i,k]+d[k,j] với d(i,k)d(i,k) là độ dài đường chéo (i,k)(i,k).

Tóm lại công thức QHĐ như sau:

* F[i,j]=0F[i,j]=0 với j<i+3j<i+3.
* F[i,j]=min(F[i,k]+F[k,j]+d[i,k]+d[k,j])F[i,j]=min(F[i,k]+F[k,j]+d[i,k]+d[k,j]) với k=i+1,…j−1k=i+1,…j−1. F[1,n]F[1,n] là tổng đường chéo của cách chia tối ưu.

**Biểu thức số học (IOI 1999)**

**Bài toán**

Cho biểu thức A1⋅A2⋅…⋅ANA1⋅A2⋅…⋅AN, trong đó AiAi là các số thực không âm và ⋅⋅ là một phép toán + hoặc \* cho trước. Hãy đặt các dấu ngoặc để biểu thức thu được có kết quả lớn nhất.

**Hướng dẫn**

Gọi F[i,j]F[i,j] là giá trị lớn nhất có thể có của biểu thức Ai⋅Ai+1⋅…⋅AjAi⋅Ai+1⋅…⋅Aj. Dễ thấy nếu i=ji=j thì F[i,j]=AiF[i,j]=Ai, nếu j=i+1j=i+1 thì F[i,j]=Ai⋅AjF[i,j]=Ai⋅Aj. Nếu j>i+1j>i+1 thì có thể tính biểu thức Ai⋅Ai+1⋅…⋅AjAi⋅Ai+1⋅…⋅Aj bằng cách chia thành 2 nhóm: (Ai⋅Ai+1⋅…⋅Ak)⋅(Ak+1⋅…⋅Aj)(Ai⋅Ai+1⋅…⋅Ak)⋅(Ak+1⋅…⋅Aj), Khi đó F[i,j]=F[i,k]⋅F[k+1,j]F[i,j]=F[i,k]⋅F[k+1,j].

Tóm lại, công thức QHĐ là:

* F[i,i]=AiF[i,i]=Ai
* F[i,i+1]=Ai⋅Ai+1F[i,i+1]=Ai⋅Ai+1
* F[i,j]=max(F[i,k]⋅F[k+1,j])F[i,j]=max(F[i,k]⋅F[k+1,j]) với k=i+1,i+2,..j−1k=i+1,i+2,..j−1.

(Chú là là các hạng tử của dãy đều không âm và các phép toán là + hoặc \* nên F[i,k]F[i,k] và F[k+1,j]F[k+1,j] đạt max thì F[i,k]⋅F[k+1,j]F[i,k]⋅F[k+1,j] cũng đạt max).

**6. Ghép cặp**

**6.1. Mô hình**

Có nn lọ hoa sắp thẳng hàng và kk bó hoa được đánh số thứ tự từ nhỏ đến lớn. Cần cắm kk bó hoa trên vào nn lọ sao cho hoa có số thứ tự nhỏ phải đứng trước hoa có số thứ tự lớn. Giá trị thẩm mỹ tương ứng khi cắm hoa ii vào lọ thứ jj là v(i,j)v(i,j). Hãy tìm 1 cách cắm sao cho tổng giá trị thẫm mỹ là lớn nhất. Chú ý rằng mỗi bó hoa chỉ được cắm vào 1 lọ và mỗi lọ cũng chỉ cắm được 1 bó hoa.

**6.2. Công thức**

Nhận xét rằng bài toán nêu trên là một bài toán ghép cặp có yêu cầu về thứ tự nên ta có thể giải quyết bằng phương pháp QHĐ.

Hàm mục tiêu: ff: tổng giá trị thẩm mỹ của cách cắm.

Giá trị thẩm mỹ phụ thuộc vào các hoa và các lọ đang được xét nên ta sẽ dùng mảng 2 chiều để lưu bảng phương án.

L(i,j)L(i,j): tổng giá trị thẩm mỹ lớn nhất khi xét đến hoa ii và lọ jj. Khi tính L(i,j)L(i,j) hoa đang xét sẽ là hoa ii và lọ jj.

* Nếu i=ji=j. Chỉ có một cách cắm L[i,i]:=V[1,1]+V[2,2]+…+V[i,i]L[i,i]:=V[1,1]+V[2,2]+…+V[i,i]
* Nếu i>ji>j. Không có cách cắm hợp lý
* Nếu i<ji<j. Có 2 trường hợp xảy ra:
  + Cắm hoa ii vào lọ jj. Tổng giá trị thẩm mỹ là L[i−1,j−1]+V(i,j)L[i−1,j−1]+V(i,j). (Bằng tổng giá trị trước khi cắm cộng với giá trị thẩm mỹ khi cắm hoa ii vào lọ jj)
  + Không cắm hoa ii vào lọ jj (có thể cắm vào lọ trước jj), giá trị thẫm mỹ của cách cắm là như cũ: L[i,j−1]L[i,j−1]

**6.3. Cài đặt**

L[i,j]:= -maxint;

**For** i:=1 **to** k **do**

**For** j:=i **to** n **do**

**If** i = j **then** L[i,j]:=sum(i)

**else** **if** i<j **then** L[i,j]:=max(L[i-1,j-1]+v[i,j],L[i,j-1]);

**6.4. Một số bài toán khác**

**Câu lạc bộ**

**Bài toán**

Có nn phòng học chuyên đề và kk nhóm học được đánh số thứ tự từ nhỏ đến lớn. Cần xếp kk nhóm trên vào nn phòng học sao cho nhóm có số hiệu nhỏ được xếp vào phòng có số hiệu nhỏ, nhóm có số hiệu lớn phải được xếp vào phòng có số hiệu lớn. Với mỗi phòng có chứ học sinh, các ghế thừa phải được chuyển ra hết, nếu thiếu ghế thì lấy vào cho đủ ghế. Biết phòng ii có AiAi ghế, nhóm jj có BjBj học sinh. Hãy chọn 1 phương án bố trí sao cho tổng số lần chuyển ghế ra và vào là ít nhất.

**Hướng dẫn**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Khi xếp nhóm ii vào phòng jj thì số lần chuyển ghế chính là độ chênh lệch giữa số ghế trong phòng ii và số học sinh trong nhóm. Đặt $V[i,j]:= | A\_i - B\_j | $ |

**Mua giày (Đề QG bảng B năm 2003)**

**Bài toán**

Trong hiệu có nn đôi giày, đôi giày ii có kích thước HiHi. Có kk người cần mua giày, người ii cần mua đôi giày kích thước SiSi. Khi người ii chọn mua đôi giày jj thì độ lệch sẽ là |Hi−Sj||Hi−Sj|. Hãy tìm cách chọn mua giày cho kk người trên sao cho tổng độ lệch là ít nhất. Biết rằng mỗi người chỉ mua 1 đôi giày và 1 đôi giày cũng chỉ có một người mua.

**Hướng dẫn**

Lập công thức giải như bài Câu lạc bộ. Chú ý chứng minh tính đúng đắn của bổ đề heuristic sau: Cho 2 dãy tăng dần các số dương A1,A2,…,ANA1,A2,…,AN, B1,B2,…,BNB1,B2,…,BN. Gọi C1,C2,…,CNC1,C2,…,CN là một hoán vị bất kỳ của dãy BB. Khi đó: |A1−B1|+|A2−B2|+…+|AN−BN|≤|A1−C1|+|A2−C2|+…+|AN−CN||A1−B1|+|A2−B2|+…+|AN−BN|≤|A1−C1|+|A2−C2|+…+|AN−CN|

**7. Di chuyển**

**7.1. Mô hình**

Cho bảng AA gồm M∗NM∗N ô. Từ ô (i,j)(i,j) có thể di chuyển sang 3 ô (i+1,j)(i+1,j), (i+1,j−1)(i+1,j−1) và (i+1,j+1)(i+1,j+1). Hãy xác định một lộ trình đi từ hàng 1 đến hàng MM sao cho tổng các ô đi qua là lớn nhất.

**7.2. Công thức**

Gọi F(i,j)F(i,j) là giá trị lớn nhất có được khi di chuyển đến ô (i,j)(i,j). Có 3 ô có thể đi đến ô (i,j)(i,j) là (i−1,j)(i−1,j), (i−1,j−1)(i−1,j−1) và (i−1,j+1)(i−1,j+1). Do đó ta có công thức QHĐ như sau:

* F[1,j]=A[1,j]F[1,j]=A[1,j]
* F[i,j]=max(F[i−1,j],F([i−1,j−1],F[i−1,j+1])+A[i,j]F[i,j]=max(F[i−1,j],F([i−1,j−1],F[i−1,j+1])+A[i,j] với i>1i>1

**7.3. Cài đặt**

Bảng phương án là bảng 2 chiều F[0..m,0..n]F[0..m,0..n]. (Tất cả các ô trên biên đều cho giá trị bằng 0).

Quá trình tính như sau:

**for** i:=1 **to** m **do**

**for** j := 1 **to** n **do**

F[i,j]=max(F[i-1,j],F[i-1,j-1],F[i-1,j+1]]+A[i,j]);

Cách cài đặt này cho độ phức tạp bộ nhớ và thời gian đều là O(n2)O(n2). Ta có thể tiết kiệm không gian nhớ bằng cách tính trực tiếp trên mảng AA.

**7.4. Một số bài toán khác**

**Tam giác (IOI 1994)**

**Bài toán**

Cho một tam giác gồm các số nguyên không âm. Hãy tính tổng lớn nhất các số trên đường đi từ đỉnh tam giác xuống một điểm nào đó ở đáy tam giác nào đó. Tại mỗi ô ta chỉ có đi thẳng xuống, sang ô bên trái hoặc bên phải.

**Hướng dẫn**

Mô tả các phần tử của tam giác số như một ma trận, A[i,j]A[i,j] là phần tử thứ jj trên dòng ii (với 1≤i≤N1≤i≤N và 1≤j≤i1≤j≤i). Có 2 ô có thể di chưyển đến ô (i,j)(i,j) là ô (i−1,j−1)(i−1,j−1) và ô (i−1,j)(i−1,j). Gọi F(i,j)F(i,j) là tổng lớn nhất có thể có khi đi đến ô (i,j)(i,j) ta có:

* F[1,1]=A[1,1]F[1,1]=A[1,1]
* F[i,1]=F[i−1,1]+A[i,1]F[i,1]=F[i−1,1]+A[i,1]
* F[i,j]=max(F[i−1,j−1],F[i−1,j])+A[i,j]F[i,j]=max(F[i−1,j−1],F[i−1,j])+A[i,j]